

# Geometria I - SECONDO TEST

3 luglio 2012

**Esercizio 1.** Nel piano affine reale  $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ , studiare le posizioni reciproche delle rette  $r$ ,  $s$ ,  $t$ , risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + hy = 3 & (r) \\ 2x + 4y = 6 & (s) \\ hx = 1 & (t) \end{cases},$$

al variare di  $h \in \mathbb{R}$ . [Per  $h = 2$ :  $r$  coincid.  $s$ ,  $t$  incidente  $r$ ; per  $h = 1/3$ :  $r, s, t$  appartengono al fascio proprio di centro  $(3; 0)$ ; per  $h \neq 2, 1/3$  le rette sono a due a due incidenti (e non appartengono allo stesso fascio).] 3

**Esercizio 2.** Nello spazio euclideo  $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$  siano, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ :

$$r : \begin{cases} x - kz = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = k - 1 \\ z = kt \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Determinare:

- (a) le posizioni reciproche delle due rette, al variare del parametro  $k$ ; [Se  $k \neq 2, \pm 1$  le rette sono sghembe. Negli altri casi sono incidenti] 2
- (b) posto  $k = 2$ , un'equazione cartesiana del piano che le contiene; [ $x + y = 3$ ] 2
- (c) posto  $k = 0$ , le equazioni dei piani paralleli su cui  $r$  ed  $s$  giacciono. [ $x + y - 2z - 3 = 0(r)$ ,  $x + y - 2z - 1 = 0(s)$ ] 2

**Esercizio 3.** Nel piano proiettivo complesso, siano  $a_1 : x = 2$  e  $a_2 : x = 2y$  due rette.

- (a) Scrivere un'equazione per il fascio  $\mathcal{F}$  di coniche per le quali le rette  $a_1$  e  $a_2$  sono asintoti, motivando il procedimento. [ $\mathcal{F} : (x - 2)(x - 2y) + k = 0, k \in \mathbb{R}$ ] 2
- (b) Verificato che un'equazione per  $\mathcal{F}$  è

$$x^2 - 2xy - 2x + 4y + k = 0,$$

classificare il fascio dal punto di vista affine e proiettivo e determinare le coordinate del centro delle coniche di  $\mathcal{F}$ . [Si tratta di iperboli. Generali se  $k \neq 0$ , degeneri se  $k = 0$ . Centro:  $(2; 1)$ .] 4

- (c) Determinare un'equazione della conica  $\mathcal{C}$  di  $\mathcal{F}$  rispetto alla quale la retta  $p : x + y = 0$  è la polare del punto  $P(1; -1)$ . [ $x^2 - 2xy - 2x + 4y + 3 = 0$ ] 2

**Esercizio 4.** Determinare per quali valori di  $\alpha$  e  $\beta$ , parametri reali, ognuna delle seguenti applicazioni  $g_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , per  $i = 1, 2, 3$ , è :

1. una forma bilineare;
2. un prodotto scalare;
3. una forma bilineare definita positiva.

(a)  $g_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2$ ; [1.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ; 2.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ; 3.  $\alpha > 0, \beta > 0$ ]  
 $\boxed{3}$

(b)  $g_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \alpha x_1 y_2 + \beta x_2 y_1$ ; [1.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ; 2.  $\alpha = \beta$ ; 3. Mai]  $\boxed{3}$

(c)  $g_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \beta x_1^2 y_2 + \alpha x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1$ . [1.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}; \beta = 0$ ; 2. Idem; 3. Mai]  $\boxed{3}$